

Das Mathe-Kochbuch
Numerische Berechnungsverfahren

Dominic Griesel

18. Oktober 2012

AUSZUG

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
1.1. Vorwort	7
2. Grundlagen	9
2.1. Indexnotation	9
2.1.1. Freie und stumme Indizes	9
2.1.2. Kronecker-Delta und Permutationssymbol	10
2.1.3. Rechenoperationen	10
2.2. Modellgleichungen	11
2.2.1. Transportprobleme	11
2.2.2. Randbedingungen	12
2.3. Gauß'scher Satz	13
2.4. Beispiele	13
2.4.1. Beispiele zum Gauß'schen Satz	13
3. Finite-Volumen-Methode	19
3.1. Übliche Kontrollvolumina in 1D bis 3D	19
3.1.1. 1D-Kontrollvolumen	19
3.1.2. 2D-Kontrollvolumen	20
3.1.3. 3D-Kontrollvolumen	21
3.2. Diskretisierungsmethoden	21
3.2.1. Integralapproximationen	21
3.2.2. Diskretisierung konvektiver Flüsse (Funktionswerte)	23
3.2.3. Diskretisierung diffusiver Flüsse (Normalableitungen)	24
3.3. Vorgehensweise	25
3.3.1. Prinzipieller Ablauf	25
3.3.2. Behandlung von Randbedingungen	26
3.3.3. Instationäre Probleme	28
3.4. Beispiele	29
3.4.1. Beispiel 1: 2D-Wärmeleitung	29
3.4.2. Beispiel 2: 2D-Wärmeleitung die zweite	30
3.4.3. Beispiel 3: instationäre Transportgleichung in 1D	33
4. Finite-Element-Methode	35
4.1. Die schwache Formulierung	35
4.1.1. Herleitung	35
4.1.2. Herleitung, die zweite	36
4.2. Partielle Integration im Mehrdimensionalen	36
4.3. Das Verfahren der gewichteten Residuen	37
4.3.1. Praktische Umsetzung	38
4.3.2. Wahl der Ansatz- und Testfunktion	38

4.4.	Finite Elemente	39
4.4.1.	Ansatzfunktionen	39
4.4.2.	Stetigkeitsbedingungen	40
4.4.3.	Transformation auf Einheits Elemente	41
4.5.	Berechnungsablauf	45
4.5.1.	Neumann-Randbedingungen	46
4.5.2.	Gesamtgleichungssystem	46
4.5.3.	Dirichlet-Randbedingungen	49
4.6.	Beispiele	49
4.6.1.	Schwache Formulierung	49
4.6.2.	Schwache Formulierung, die Zweite	50
4.6.3.	Formfunktionen	51
4.6.4.	Transformation auf Einheits Elemente	53
4.6.5.	Beliebige Transformation	54
4.6.6.	Koinzidenzmatrix	55
4.6.7.	Koinzidenzmatrix rückwärts	55
4.6.8.	Steifigkeitsmatrix und Lastvektor	57
4.6.9.	1D-FEM	58
4.6.10.	2D-FEM	62
5.	Zeitdiskretisierung	67
5.1.	Grundlagen	67
5.1.1.	Notation	67
5.1.2.	Reduktion der Ordnung	67
5.1.3.	Finite Volumen	68
5.1.4.	Finite Elemente	68
5.2.	Die Verfahren	68
5.2.1.	Das explizite Euler-Verfahren	68
5.2.2.	Das implizite Euler-Verfahren	69
5.2.3.	Das Crank-Nicolson-Verfahren	70
5.3.	Beispiele	70
5.3.1.	Beispiel 1: Alles auf einmal!	70
5.3.2.	Beispiel 2: DGL 2. Ordnung	71
6.	Eigenschaften von Berechnungsverfahren	73
6.1.	Abbruchfehler	74
6.2.	Stabilitätsanalyse	74
6.3.	Gitterunabhängige Lösung	74
6.4.	Beispiele	76
6.4.1.	Konsistenz	76
6.4.2.	Konsistenz, die zweite	77
6.4.3.	Konservativität und Beschränktheit	78
6.4.4.	Stabilität	79
6.4.5.	Gitterunabhängige Lösung	80
A.	Kurzrezepte	81
A.1.	Indexnotation	81
A.1.1.	Tensoren	81
A.1.2.	freie und stumme Indizes	81

A.1.3. Rechenoperationen	81
A.2. Modellgleichungen	82
A.2.1. Bedeutung der einzelnen Größen	82
A.2.2. Bedeutung der einzelnen Terme	82
A.2.3. Randbedingungen	83
A.3. Gauß'scher Satz	83
A.3.1. Partielle Integration im Mehrdimensionalen	84
A.4. Finite-Volumen-Methode	84
A.4.1. Kontrollvolumina	84
A.4.2. Integralapproximationen	85
A.4.3. Diskretisierung konvektiver Flüsse (Funktionswerte)	86
A.4.4. Diskretisierung diffusiver Flüsse (Normalableitungen)	86
A.4.5. Ablauf	87
A.5. Finite-Element-Methode	87
A.5.1. Element-Ansatzfunktionen	87
A.5.2. Transformation auf Einheitselemente	88
A.5.3. Ablauf	90
A.6. Zeitdiskretisierung	91
A.6.1. Reduktion der Ordnung	92
A.6.2. FEM	92
A.6.3. expliziter Euler	92
A.6.4. impliziter Euler	92
A.6.5. Crank-Nicolson	92
A.7. Eigenschaften von Berechnungsverfahren	92
A.7.1. Abbruchfehler	93
A.7.2. Gitterunabhängige Lösung	93
B. FEM-Koppeltafeln	95
B.1. Lineares Dreieckselement	95
B.1.1. Integrale	95
B.2. Bilineares Viereckselement	96
B.2.1. Integrale	96

Bezeichnung	Vektorschreibweise	Indexnotation
Skalarprodukt	$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{c} = A \cdot \vec{b}$	$c = a_i b_i$ $c_k = A_{ik} b_i$
Kreuzprodukt	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$
Gradient	$c = \text{grad } a = \nabla a$ $\mathbf{T} = \text{grad } \vec{u} = \nabla \vec{u}$	$c_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}$ $t_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$
Divergenz	$c = \text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$ $\vec{c} = \text{div } \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T}$	$c = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ $c_i = \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j}$
Rotation	$\vec{c} = \text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$	$c_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$
Laplace-Operator	$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$	$c = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i}$

2.2. Modellgleichungen

2.2.1. Transportprobleme

Viele Probleme im Bereich des Maschinenbaus lassen sich durch eine einzige Gleichung beschreiben, wenn man die Parameter entsprechend wählt. Diese sogenannte *allgemeine skalare Transportgleichung* hat die Form

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho v_i \phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = f. \quad (2.1)$$

Man beachte, dass hier die Summenkonvention Anwendung findet! Die DGL in dieser Form gilt für jede beliebige Raumdimension, die zweidimensionale Transportgleichung unterscheidet sich von der eindimensionalen daher nur durch die Anzahl der Summanden.

Bedeutung der einzelnen Größen

ϕ : Die unbekannte Größe, für die die DGL gilt. Sie wird passend zum betrachteten Problem gewählt. Ein Beispiel ist $c_p T$ bei Wärmeleitung.

ρ : Die Dichte des betrachteten Mediums.

v_i : Die (Konvektions-)geschwindigkeit des Mediums in x_i -Richtung. In Festkörpern findet keine Konvektion statt, daher ist $v_i = 0$.

α : Die Leitfähigkeit des Mediums, z. B. die Wärmeleitfähigkeit λ .

f : Äußere Einflüsse, z. B. Wärmequellen/-senken ρq bei Wärmeleitung.

Diese Größen sind nicht notwendigerweise konstant, bei einem inhomogenen Material könnte die Leitfähigkeit oder die Dichte vom Ort abhängen.

Bedeutung der einzelnen Terme

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$: Zeitabhängiger Term. Tritt nur bei instationären Problemen auf und benötigt dann zusätzlich eine Anfangsbedingung $\phi(\vec{x}, t) = \phi_0(\vec{x})$ für jeden Ort des Problems.

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i \phi)$: Konvektiver Anteil des Transportvorganges. Durch Integration und Anwenden des Gauß'schen Satzes erhält man den *konvektiven Fluss*

$$F_c^C = \int_{S_c} (\rho v_i \phi) n_{ci} dS_c \approx \underbrace{\rho v_i n_{ci} \delta S_c}_{=\dot{m}_c} \cdot \phi_c$$

und damit den Massenstrom durch die Ränder des betrachteten Volumens, hier am Beispiel der Seite S_c . Für das Upwind-Verfahren, das wir später kennen lernen, interessiert primär das Vorzeichen des Massenstroms, welches sich direkt aus der DGL ablesen lässt (der Vorfaktor von ϕ in der Klammer). Positiv bedeutet, dass die Masse in positive Koordinatenrichtung strömt.

$\frac{\partial}{\partial x_i}(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i})$: Diffusiver Anteil des Transportvorganges. Analog zum konvektiven Anteil erhält man den *diffusiven Fluss*

$$F_c^D = - \int_{S_c} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) n_{ci} dS_c \approx -\alpha n_{ci} \delta S_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_c$$

Vorsicht: Die hier ausgeführten Integralapproximationen (mehr dazu später) gelten so nur für konstante Koeffizienten ρ , v_i und α

2.2.2. Randbedingungen

Wie wir bereits wissen, benötigt man für die Lösung der Differentialgleichungen Randbedingungen. Diese lassen sich in drei Klassen einteilen:

Dirichletsche Randbedingungen: Vorgabe des Funktionswertes ϕ auf dem dem Dirichlet-Rand S_D :

$$\phi = \phi_S \text{ auf } S_D$$

Neumannsche Randbedingungen: Vorgabe der Normalableitung $\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i$ auf dem Neumann-Rand S_N :

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = b_S \text{ auf } S_N$$

Wichtig: der Faktor α entspricht der Leitfähigkeit in der Transportgleichung!

Cauchysche Randbedingungen: Gemischte Randbedingungen auf dem Cauchy-Rand S_C :

$$c_S \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = b_S \text{ auf } S_C$$

Die Randstücke S_D , S_N , S_C ergeben zusammen den gesamten Rand S , können in mehrere Teile aufgeteilt sein, überlappen sich aber nicht!

3. Finite-Volumen-Methode

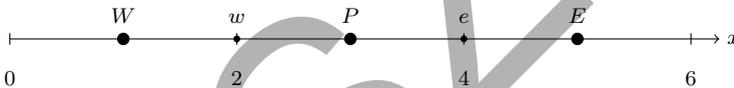
Das erste Verfahren, das wir kennen lernen, ist die Finite-Volumen-Methode (FVM). Sie hat die nette Eigenschaft, dass die Bilanzgleichungen, auf die sie angewendet wird, ihre Gültigkeit durch die Diskretisierung nicht verlieren. Allerdings ermöglicht sie es nur, einzelne diskrete Funktionswerte auszurechnen.

3.1. Übliche Kontrollvolumina in 1D bis 3D

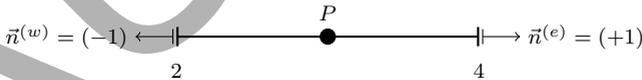
Für die Berechnung wird das betrachtete Gebiet in eines oder mehrere Kontrollvolumina zerlegt. Bei der händischen Berechnung wird üblicherweise auf kartesische, d.h. an den Koordinatenachsen ausgerichtete, rechteckige Kontrollvolumina zurückgegriffen. Bei FVM werden die gesuchten Funktionswerte in der Regel in der Mitte der Kontrollvolumina berechnet.

3.1.1. 1D-Kontrollvolumen

Ein Kontrollvolumen mit einer Dimension ist ein Abschnitt auf der x -Achse, hier die drei Kontrollvolumina $[0; 2]$, $[2; 4]$ und $[4; 6]$:



Der Index P bezeichnet den Mittelpunkt des aktuell betrachteten Kontrollvolumens (hier $[2; 4]$), E (east) steht für das KV rechts des aktuellen KV, W (west) für das KV links davon. Mit den Kleinbuchstaben e bzw. w werden die Ränder des aktuellen KV bezeichnet. Wendet man Approximationen höherer Ordnung an, benötigt man die Nachbarn der Nachbarn, welche mit EE (zwei mal rechts) und WW (zwei mal links) bezeichnet werden. Mit dem hochgestellten Index bezeichnen wir die Seite, zu der ein Normalenvektor gehört. Um eine beliebige Kante zu bezeichnen, verwendet man in der Regel den Index c . Betrachten wir nochmals das Kontrollvolumen von oben:



Es mag auf den ersten Blick vielleicht nicht klar sein, aber die Normalenvektoren haben im 1D-Raum auch nur eine Komponente nämlich $+1$ am rechten Rand des KV und -1 am linken Rand des KV. Außerdem reduzieren sich Volumenintegrale auf eine Integration mit einer Variablen:

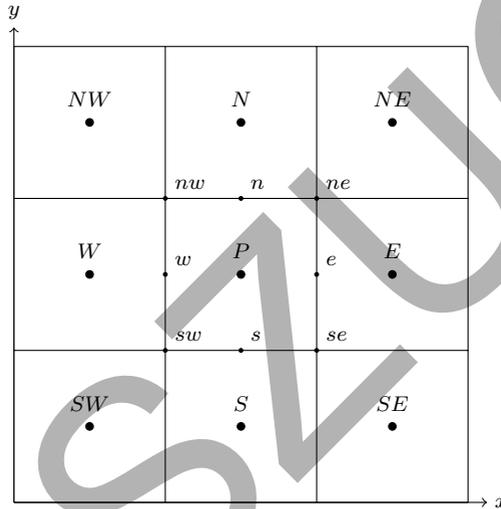
$$\iiint_V g \, dV \Rightarrow \int_{x=x_w}^{x_e} g \, dx$$

und Oberflächenintegrale reduzieren sich auf eine Auswertung an den Intervallgrenzen, da die Oberfläche eines 1D-Volumens von nullter Dimension sein müsste:

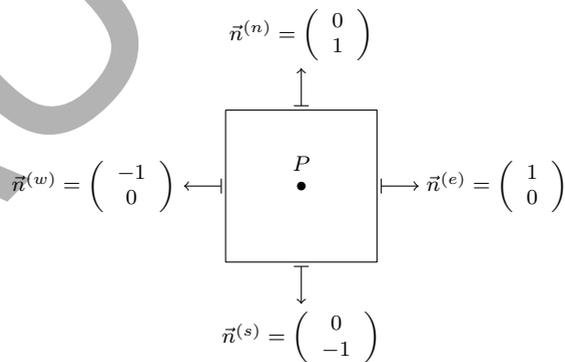
$$\iint_S F_i n_i dS \Rightarrow F_i n_i = F(x_e) \cdot (+1) + F(x_w) \cdot (-1) \quad (3.1)$$

3.1.2. 2D-Kontrollvolumen

In der zweiten Dimension kommen ein paar zusätzliche Nachbarn dazu:



Die zusätzlichen Nachbarvolumina und -kanten werden analog bezeichnet. Für die Normalenvektoren betrachten wir uns nochmal einen Ausschnitt:



3.4. Beispiele

3.4.1. Beispiel 1: 2D-Wärmeleitung

Als erstes betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = xy$$

auf dem Gebiet

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 2]$$

mit den Randbedingungen

$$T(x, 0) = 1 \quad T(x, 2) = x^2 \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 1 \quad \frac{\partial T}{\partial x}(1, y) = y.$$

Zunächst integrieren wir die DGL über ein Kontrollvolumen V

$$\int_V \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dV = \int_V xy dV$$

und wenden auf die linke Seite den Gauß'schen Satz an

$$\int_S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + \left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot n_y \right) dS = \int_V xy dV.$$

Es ist sinnvoll, das Gebiet in kartesische Kontrollvolumina einzuteilen, daher lässt sich die linke Seite nach der Aufteilung auf die einzelnen Flächen vereinfachen (siehe Ablauf Schritt 4):

$$\int_{S_w, S_e} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x dS + \int_{S_n, S_s} \left(\left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot n_y \right) dS = \int_V xy dV.$$

Wir approximieren alle Integrale mit der Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x \right)_w \cdot \delta S_w + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x \right)_e \cdot \delta S_e \\ & + \left(\left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot n_y \right)_n \cdot \delta S_n \\ & + \left(\left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot n_y \right)_s \cdot \delta S_s = x_p y_p \delta V. \end{aligned}$$

Da wir, wie bereits erwähnt, kartesische Kontrollvolumina betrachten, können wir vereinfachend schreiben

$$\delta S_w = \delta S_e = \Delta y \quad \delta S_n = \delta S_s = \Delta x \quad \delta V = \Delta x \Delta y$$

sodass wir (nachdem wir die Komponenten der Normalenvektoren eingesetzt haben) die Gleichung vereinfachen können zu

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \cdot \Delta y + \left(\left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \cdot \Delta x = x_p y_p \Delta x \Delta y. \quad (3.2)$$

Wie es jetzt weitergeht, hängt von den benutzten Kontrollvolumina ab. Der Einfachheit halber verwenden wir nur ein einziges Kontrollvolumen, das das gesamte Gebiet Ω umfasst. Damit sind die Koordinaten des Kontrollvolumens

$$\begin{aligned} (x_w | y_w) &= (0|1) & (x_e | y_e) &= (1|1) \\ (x_n | y_n) &= (0,5|2) & (x_s | y_s) &= (0,5|0) \\ (x_P | y_P) &= (0,5|1) \end{aligned}$$

und die Kantenlängen

$$\Delta x = 1 \qquad \Delta y = 2.$$

Als nächstes müssen wir die Unbekannten ersetzen. Die Normalableitungen auf der w - und e -Seite erhalten wir aus den Randbedingungen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = 1 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = y_e = 1,$$

genau wie die Funktionswerte auf der n - und s -Seite

$$T_n = x_n^2 = 0,25 \qquad T_s = 1.$$

Für die Normalableitungen auf der n - und s -Seite müssen wir Differenzenquotienten aufstellen, da wir hierfür keine Vorgaben haben, dabei setzen wir die bekannten Werte direkt ein

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = \frac{T_n - T_P}{y_n - y_P} = 0,25 - T_1 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = \frac{T_P - T_s}{y_P - y_s} = T_1 - 1.$$

Das alles setzen wir in die diskretisierte Gleichung (3.2) ein und erhalten

$$(1 - 1) \cdot 2 + (0,5 + 0,25 - T_1 - (2 + T_1 - 1)) \cdot 1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

und damit die Lösung

$$T_1 = -\frac{5}{8}$$

3.4.2. Beispiel 2: 2D-Wärmeleitung die zweite

Als zweites berechnen wir dasselbe Problem wie in Beispiel 1, diesmal aber mit den zwei Kontrollvolumina

$$V_1 = [0; 1] \times [0; 1] \qquad V_2 = [0; 1] \times [1; 2].$$

Wir beginnen direkt mit der diskretisierten Gleichung (3.2):

$$\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \cdot \Delta y + \left(\left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(2T + \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \cdot \Delta x = x_p y_p \Delta x \Delta y. \quad (3.3)$$

In den Spalten der Matrix stehen dann nämlich die Vorfaktoren der Koordinaten der Ansatzfunktion (in der selben Reihenfolge wie die a_j -s aus dem Ansatz!), sodass wir uns das Auflösen sparen:

$$\phi^i(x, y) = \underbrace{(\beta_{11}^i + \beta_{21}^i \cdot x + \dots + \beta_{n1}^i \cdot y)}_{N_1^i(x, y)} \cdot \phi_1^i + \dots + \underbrace{(\beta_{1n}^i + \dots + \beta_{nn}^i)}_{N_n^i(x, y)} \cdot \phi_n^i.$$

Die Terme N_j^i in den Klammern nennt man *lokale Formfunktionen*. Somit erhalten wir eine alternative (und praktischere) Darstellung der Ansatzfunktion

$$\phi^i(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \phi_k^i N_k^i(\vec{x}).$$

Sie gilt so nur für einzelne Elemente (erkennbar am Index i). Die entsprechende globale Darstellung, die die Lösung im gesamten Problemgebiet beschreibt, lautet

$$\phi(\vec{x}) = \varphi_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \phi_k N_k(\vec{x}),$$

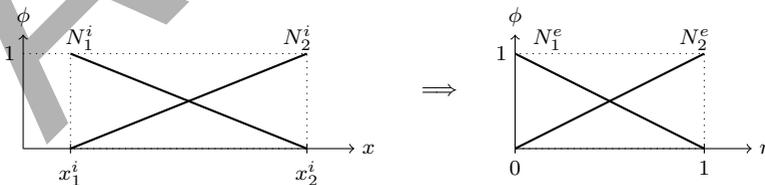
dabei steht ϕ_k für die k -te *globale Knotenvariable* (sie ist mehreren Elementen zugeordnet), N_k ist zusammengesetzt aus lokalen Formfunktionen und φ_0 erfüllt die dirichletschen Randbedingungen und ist ebenfalls aus Formfunktionen zusammengesetzt. Wir werden für die Berechnung allerdings bei der lokalen Darstellung bleiben.

4.4.3. Transformation auf Einheitselemente

In der Regel werden die finiten Elemente durch eine Variablentransformation auf Einheitselemente abgebildet. Das hat den Vorteil, dass man auftretende Integrale unabhängig vom jeweiligen Element machen kann und diese daher nur einmal ausgerechnet werden müssen - ein riesiger Vorteil bei vielen Elementen. Variablen und Funktionen, die sich auf das Einheitselement beziehen, werden mit einem hochgestellten Index e bezeichnet.

1D

Bei eindimensionalen Problemen müssen wir ein beliebiges Intervall $[x_1^i; x_2^i]$ und die Formfunktionen (hier am Beispiel eines linearen Ansatzes) auf das Intervall $[0; 1]$ abbilden:



Das geschieht mit der Variablentransformation

$$x = x_1^i + r \cdot \underbrace{(x_2^i - x_1^i)}_{\Delta x},$$

die *natürliche Koordinate* r nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Damit können wir Transformationsvorschriften herleiten für Integrale

$$\frac{dx}{dr} = \Delta x \quad \Rightarrow \quad dx = \Delta x \cdot dr$$

und Ableitungen

$$\frac{dN_k^i}{dx} = \frac{dN_k^e}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{dN_k^e}{dr} \cdot \frac{1}{\Delta x},$$

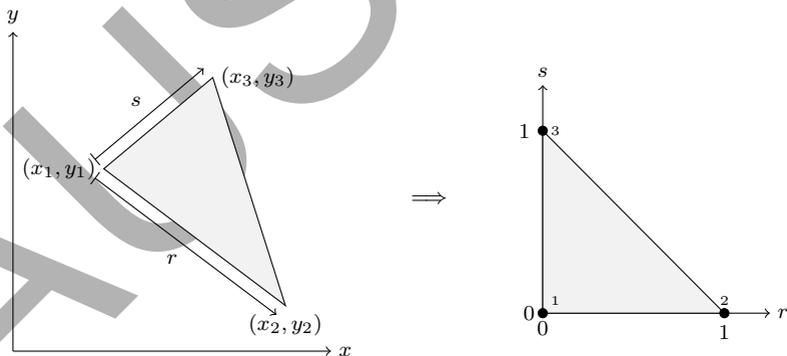
wobei $\frac{dr}{dx}$ gerade der Kehrwert der vorherigen Transformation ist. Die Ableitungsregeln gelten nicht nur für die Formfunktionen N_k sondern für jede beliebige Funktion!

Die Integration vereinfacht sich nach der Transformation auf

$$\int_0^1 (\dots) \Delta x \, dr.$$

2D

In zwei Dimensionen wird das ganze etwas schwieriger, glücklicherweise gelten für Dreiecke und Parallelogramme (und damit Rechtecke und Quadrate) die gleichen Transformationsvorschriften. Allerdings benötigen wir nun zwei natürliche Koordinaten r und s . Die hochgestellten Indizes i lasse ich der Übersicht halber weg. Die Nummerierung der Eckpunkte 1 bis 3 ist dabei willkürlich, allerdings zählt r immer von Punkt 1 zu Punkt 2 und s von Punkt 1 zu Punkt 3:



Die Transformationsvorschrift lautet dann

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1) \cdot r + (x_3 - x_1) \cdot s \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1) \cdot r + (y_3 - y_1) \cdot s, \end{aligned}$$

Den Knoten 7 finden wir in Element 1 (Knoten 3) und 2 (Knoten 2), also erhalten wir

$$b_7 = b_3^1 + b_2^2$$

4.6.9. 1D-FEM

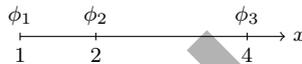
Jetzt haben wir alles ausgiebig behandelt und können uns einer „richtigen“ FEM zuwenden. Trotzdem fangen wir klein an und betrachten die eindimensionale Gleichung

$$3\phi'' - 4\phi' + \phi = x \quad \text{auf } x \in (1; 4)$$

mit den Randbedingungen

$$\phi'(1) = 1 \qquad \phi'(4) = -2$$

auf dem Problemgebiet



Schwache Formulierung Wir multiplizieren die DGL mit einer Testfunktion w und integrieren über das Problemgebiet:

$$\int_1^4 3\phi'' \cdot w \, dx - \int_1^4 4\phi' \cdot w \, dx + \int_1^4 \phi \cdot w \, dx = \int_1^4 x \cdot w \, dx,$$

das erste Integral integrieren wir partiell

$$[3\phi' \cdot w]_1^4 - \int_1^4 3\phi' \cdot w' \, dx - \int_1^4 4\phi' \cdot w \, dx + \int_1^4 \phi \cdot w \, dx = \int_1^4 x \cdot w \, dx,$$

bringen den Randterm auf die rechte Seite, fassen die Integrale links zusammen und multiplizieren mit (-1) , um links ein paar Minuszeichen wegzuschaffen

$$\int_1^4 (\phi' \cdot (3w' + 4w) - \phi \cdot w) \, dx = [3\phi' \cdot w]_1^4 - \int_1^4 x \cdot w \, dx.$$

Wir haben an beiden Rändern Aussagen über ϕ' , also können wir keine Angabe über w an den Rändern machen.

Transformation aufs Einheitsgebiet Da wir zwei verschieden große Elemente haben, bietet es sich an, diese aufs Einheitsselement zu transformieren. Die Vorschrift schlagen wir in Abschnitt 4.4.3 auf Seite 41 nach:

$$x = x_1^i + \Delta x \cdot r \\ dx = \Delta x \cdot dr.$$

5. Zeitdiskretisierung

Bei der Behandlung von instationären Problemen mit der FVM oder der FEM entstehen Differentialgleichungen oder Systeme in der Zeit, wir haben dazu bereits ein Beispiel betrachtet. Um die entstehende Gleichung zu lösen, diskretisiert man das Problem in der Zeit, d.h. man wählt einen Zeitschritt und löst die DGL zu bestimmten Zeitpunkten.

Die hierfür verwendeten Verfahren haben wir bereits in *Numerische Mathematik* kennen gelernt, daher werde ich nur noch kurz darauf eingehen.

5.1. Grundlagen

5.1.1. Notation

Alle Verfahren gehen davon aus, dass die DGL nach der höchsten Ableitung aufgelöst wurde. Ich verwende hier die Notation, die wir bereits damals verwendet haben, da sie eindeutig ist

$$\phi' = f(t, \phi),$$

bzw. für Gleichungen höherer Ordnung

$$\phi^{(n)} = f(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)}).$$

Ein hochgestellter Index in Klammern bezeichnet eine Ableitung, so steht $\phi^{(n-1)}$ für die $(n-1)$ -te Ableitung der Funktion ϕ .

5.1.2. Reduktion der Ordnung

Außerdem funktionieren die hier vorgestellten Formeln nur für DGLen bzw. Systeme 1. Ordnung. Gleichungen höherer Ordnung (d.h. mit einer höheren Ableitung als der ersten) müssen auf ein System erster Ordnung reduziert werden. Dazu definiert man zunächst n Hilfsfunktionen, wobei n die Ordnung der Gleichung ist:

$$\varphi_1 = \phi \quad \varphi_2 = \phi' \quad \dots \quad \varphi_n = \phi^{(n-1)}.$$

Wir sehen, dass jede Funktion die Ableitung der vorherigen ist

$$\varphi'_1 = \phi' = \varphi_2 \quad \varphi'_2 = \phi'' = \varphi_3 \quad \dots \quad \varphi'_{n-1} = \phi^{(n-1)} = \varphi_n,$$

sodass wir daraus $n-1$ Gleichungen erhalten. Die n -te Gleichung ergibt sich aus der DGL selbst

$$\varphi'_n = \phi^{(n)} = f(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)}).$$

Außerdem müssen wir die Randbedingungen mit den Hilfsfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ausdrücken. Wenn wir das System gelöst haben, steht in φ_1 die gesuchte Lösung, denn schließlich ist $\varphi_1 = \phi$.

B. FEM-Koppeltafeln

Da die bei der FEM auftretenden Integrale selbst für Standardansätze in wildes Kampfrechnen ausarten können, habe ich hier für die üblicherweise auftretenden Terme die Ergebnisse aufgelistet. Besteht das zu berechnende Integral aus mehreren dieser Terme, können sie einfach addiert werden, eventuell mit Vorfaktoren gewichtet.

Alle Berechnungen wurden für Einheitselemente mit der Nummerierung aus 4.4.3 auf Seite 41 durchgeführt. Bei abweichender Nummerierung müssen die Matrizen entsprechend umsortiert werden.

B.1. Lineares Dreieckselement

Formfunktionen

$$N_1^e(r, s) = 1 - r - s$$

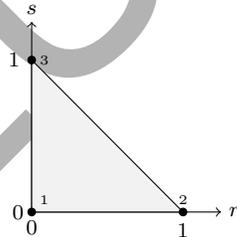
$$N_2^e(r, s) = r$$

$$N_3^e(r, s) = s$$

Integration

$$\int_{r=0}^1 \int_{s=0}^{1-r} (\dots) ds dr$$

Skizze



B.1.1. Integrale

$N_j^e : \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$N_j^e N_k^e : \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} N_k^e :$ $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\partial N_j^e}{\partial s} N_k^e :$ $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial r} : \text{Matrix transponieren.}$	$N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial s} : \text{Matrix transponieren.}$

$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} \frac{\partial N_k^e}{\partial r} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\partial N_j^e}{\partial s} \frac{\partial N_k^e}{\partial s} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} \frac{\partial N_k^e}{\partial s} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial N_j^e}{\partial s} \frac{\partial N_k^e}{\partial r} : \text{Matrix transponieren.}$	

B.2. Bilineares Viereckselement

Formfunktionen

$$N_1^e(r, s) = 1 - r - s + rs$$

$$N_2^e(r, s) = r - rs$$

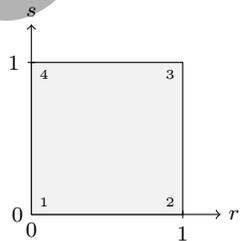
$$N_3^e(r, s) = rs$$

$$N_4^e(r, s) = s - rs$$

Integration

$$\int_{r=0}^1 \int_{s=0}^1 (\dots) ds dr$$

Skizze



B.2.1. Integrale

$N_j^e : \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$N_j^e N_k^e : \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
--	---

$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} N_k^e :$ $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ <p>$N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial r}$: Matrix transponieren.</p>	$\frac{\partial N_j^e}{\partial s} N_k^e :$ $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ <p>$N_j^e \frac{\partial N_k^e}{\partial s}$: Matrix transponieren.</p>
$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} \frac{\partial N_k^e}{\partial r} :$ $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{\partial N_j^e}{\partial s} \frac{\partial N_k^e}{\partial s} :$ $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{\partial N_j^e}{\partial r} \frac{\partial N_k^e}{\partial s} :$ $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ <p>$\frac{\partial N_j^e}{\partial s} \frac{\partial N_k^e}{\partial r}$: Matrix transponieren.</p>	